A O R

Operation Research

决策优化

三个层次: 问题 ?, 技术, 思想

" the science of better "
资源/信息情况下优化决策

凸优化

线性规划	non	整数	组合优化	博弈论	
LP	NLP	IP	$\boxed{CO}$	ACT (A: 算法)	game theory

会议: FOCS (ieee) STOC (acm) SODA ; ICALP ESA

期刊: JACM , SIAM J computing , ACM T Algorithms , Algorithmica , ...

暂定:

期末练习	(题多, 可以与老师讨论) (我会做的)	50%
作业		20%
课堂表现		10%
报告		20% (不含 presentation → bonus ≥ 0)

问题 ⟷ 实例

研究 ⟷ 搜索

规划 ⟷ coding

OR CS

离散优化 { 算得好 / 快 ⟶ 计算复杂性

第一讲：最优化模型

1. 复杂性初步

all-pair shortest path $O(n^3)$ 存在 $O(n^2)$？

SAT 2^n

O Ω Θ

input size : n 3-SAT 2^n 指数

instance

$|I|$

?

不是优化？判定？

算法：$f(|I|)$ ⟶ 一定是 input size 的！ e.g. 背包：n C

input size : n, $\log_2 C$

C是 log C 的指数 ⇓ 背包是NPC

NP：非确定性图灵机 多项式内 ✓

NPC SAT：第一个NPC 1971 Cook

$\forall NP \xrightarrow[\text{reduction}]{P} SAT \xrightarrow{P}$ 其他

1972 Karp

NPC 只是 NP 中最难，但还有 NP-Hard

$NPC = NP \cap NPHard$

2. 组合优化问题

{ 决策变量 ∵ 有选择 ∵
可行域 ∵ 选择范围 ∵
目标函数 }

$\min_{\max} f(x)$, $x \in \Omega$

Ω : R^n → 无约束

$\Omega = \{x \mid g_j(x), j = 1 \cdots m;\ h_i(x) = 0, i = 1 \cdots l\}$

组合优化：Ω 有限 ∵ 选择有限 ∵ ⟶ 一定有最优解

优化 对应 判定问题

近似：要严格证明 α

没有证明 ⇒ 启发式 alg

精确：局部最优就是全局 (e.g. MST)

局部最优 — 邻域 neighborhood（定义） e.g. 欧式空间：$0 < \|x - x_0\| < \varepsilon$ "开球"

全局最优 hw: prove MST neighborhood（只换一条边）是精确的

$x_0 \in \Omega$ $f(x_0)$ 局部最优 x_1 $f(x_1) > f(x_0)$

得到一个 alg: local search 从一个可行解出发，一直找局部最优.

局部搜索：

① terminate? 有限区域 ✓ 无限?

② 解与 OPT 差多少?

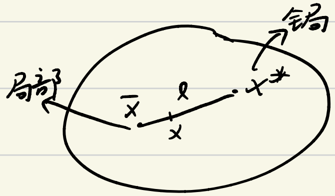
3. some concepts

Ω: ① 凸集 C : $\forall x, y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$: $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$ （∀两点的线段上所有点都在C内）

└ 局部最优 ⇒ 整体最优

② 凸函数 f: $\forall x, y \in C$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, $0 \le \lambda \le 1$ （→ 严格凸：这里不取 "="）

③ 凸优化 : f 凸, Ω 凸. 极小化问题



反证：$f(\bar{x}) > f(x^*)$

则 l 上均 $< f(\bar{x})$

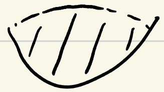
$(\because f(x) < \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(x^*)$ $< f(\bar{x})$

$< f(\bar{x}))$

结论：凸优化中局部最小就是整体最小

epigraph

$\{(z, \vec{x}) : f(\vec{x}) \le z\}$ 凸 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 凸



Examples

① 生产计划

	x_1 产品A	x_2 产品B	x_3 产品C	
材料 1	5	15	0	300
2	10	0	20	200
利润	100	200	300	

目标: $\max\ 100x_1+200x_2+300x_3$

$$\text{s.t.}\quad 5x_1+15x_2\le 300$$

$$10x_1+20x_3\le 200$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

抽象: $\max\quad c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \quad (\sum_{j=1}^{n} c_jx_j)$

$$\text{s.t.}\quad a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \le b_i,\quad i=1,2\cdots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad x_j\ge 0,\ j=1,2\cdots n$$

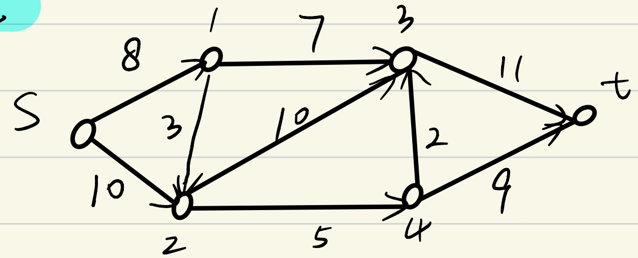
$x=(x_1\cdots x_n)^T \quad c=(c_1\cdots c_n)^T$

$$\max\ c^Tx$$

$$\text{s.t.}\quad Ax\le b$$

$$x\ge 0$$

② 网络流



$x_{s1}\quad x_{12}\quad x_{13}\ \cdots\ x_{3t}\ x_{4t}$

$$\max.\quad x_{s1}+x_{s2}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{s1}=x_{13}+x_{12} \qquad \text{平衡约束}$$

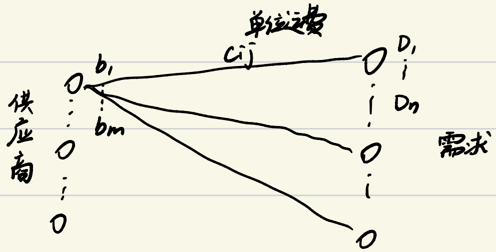
$$\vdots$$

$$x_{3t}\le 11 \qquad \text{容量约束}$$

$$\vdots$$

$$x_{ij}\ge 0$$

③ 运输问题



$\sum b_j=\sum D_i$ (供需平衡)　　若供>求，建一个虚点 D_{n+1} 且 $C_{i\,n+1}=0$

(最小费用流)

线性 f 既凸又凹，max <=> min

第二讲：线性规划基本原理

基本模型：$\max \ c^T x$

s.t. $Ax = b$ $\leq$

$x \geq 0$

可以加上/减去松弛变量 e.g. $x_1 + x_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_3 \geq 0$

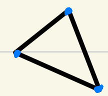
若 x_i 无限制

可令 $x_i = \overset{\geq 0}{x_{i1}} - \overset{\geq 0}{x_{i2}}$

标准形式？

至少有一个 OPT 在极点取到！

任何一点可表为三个极点的凸组合



$y = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_i$ $\quad \lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$

几何上：极点：x 是凸集 C 上的极点，若 $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ $\quad 0 \leq \lambda \leq 1$

$\Rightarrow x = y = z$

代数上：假设 $r(A) = m \leq n$

如果不是满秩：方程有冗余，去掉

基可行解 $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ 基变量 / 非基

$A = (A_B \quad A_N)$ basis

$x_N = 0$，$x_B = A_B^{-1} b \geq 0 \longrightarrow$ 基可行解 ≥ 0

最多 C_n^m 个

极方向

$AX = A_B X_B + A_N X_N = b$

$A_N X_N = 0$

基本定理：x 是极点 <=> x 是基可行解

LP 的极点就是基可行解。

BFS 基本可行解

$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$ （A_B 可逆）

可行解 $X = (\overset{\wedge 0}{x_1}, \cdots \overset{\wedge 0}{x_k}, 0 \cdots 0)$

$\updownarrow$

$a_1 \cdots a_k$ 线性无关

$k < m \Rightarrow$ 扩充

$k = m$

$k > m$ 相关 => 不是基

证明：①若 x 是极点 => x 是 BFS

反证：设 x 不是 BFS

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} >0 \\ \\ >0 \end{matrix}$

$x_1 \cdots x_k$

列向量 $a_1 \cdots a_k$

线性相关？ => $\exists \lambda_1, \cdots \lambda_k$ 不全为 0，$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$

否则 $(a_1 \cdots a_k)$ 扩充 $(a_1 \cdots a_B)$

令 $x' = x + \varepsilon \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon > 0$

$x'' = x - \varepsilon \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(x' + x'')$

只要证明 x', x'' 是可行解

① $x', x'' \geq 0$ （$\because x \geq 0$，微小扰动）

② $Ax' = Ax + \varepsilon A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b$

$Ax'' = b$

$(x_1 \cdots x_k)$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i x_i}_{b} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{B} a_i x_i}_{\Downarrow \ x_i = 0} = b$

则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 BFS

② x是BFS $\Rightarrow$ x是极点

反证: clue: x正分量对应列向量线性相关

设x不是极点, $\exists x', x''$ $Ax' = Ax'' = b$, $x', x'' \geq 0$

且$x = \lambda x' + (1-\lambda)x''$, $0<\lambda<1$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x', x'' \begin{pmatrix} \\ \\ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

设 $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_k' \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $x'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_k'' \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $x' - x'' \neq 0$

$A(x' - x'') = b - b = 0$

$(x_1' - x_1'')a_1 + \cdots + (x_k' - x_k'')a_k = 0$

$\Rightarrow a_1 \cdots a_k$ 线性相关

$\Rightarrow$ x不是BFS

第三讲: 单纯形法 (simplex)

max. $20x_1 + 30x_2$

s.t. $6x_1 + 3x_2 + x_3 = 40$

$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 50$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

① $\begin{cases} x_3 = 40 \\ x_4 = 50 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $z = 0$

把基变量,目标函数用非基变量表示: 典则形式

踢谁出去 谁入基

$\begin{cases} x_3 = 40 - 6x_1 - 3x_2 \uparrow \\ x_4 = 50 - 2x_1 - 5x_2 \uparrow \\ z = 20x_1 + 30\underline{x_2} \uparrow \text{入基} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ② $\begin{cases} x_2 = 10 \\ x_3 = 10 \\ x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ $z = 300$

$\begin{cases} x_2 = 10 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_3 = 10 - \frac{24}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_4 \\ z = 300 + 8x_1 - 6x_4 \end{cases}$

$\uparrow$ 入基

③ 典则最优

$$\begin{cases} x_1 = \frac{25}{12} \\ x_2 = \frac{55}{6} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$z = 300 + \frac{200}{12}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{25}{12} - \frac{5}{24}x_3 + \frac{x_4}{8} \\ x_2 = \\ z = 300 + \frac{200}{12} - \frac{5}{3}x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

检验数 $\sigma_i \le 0$ ✓

非基变量对应的系数

单纯形法的一般形式

$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$　　$A = (A_B \quad A_N)$

$A_B X_B + A_N X_N = b$

$$\begin{cases} X_B = A_B^{-1} b \\ X_N = 0 \end{cases}$$

典则形式

$$\begin{cases} X_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N X_N \\ z = C^T X = C_B^T X_B + C_N^T X_N \end{cases}$$

$= C_B^T A_B^{-1} b + \underbrace{(C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\text{检验数}} X_N$

记 $\bar{A} = A_B^{-1} A_N = (\bar{a}_{ij})_{m\times(n-m)}$

$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \bar{a}_{ij}$

基变量的系数

非基变量 x_j

若 σ_j 均 ≤ 0，最优

否则 选择 "$\sigma_j > 0$" 的入基变量

$X_B = A_B^{-1} b - \bar{A} X_N$

$\Rightarrow$ 若∃ $\sigma_j > 0$　$\bar{a}_{ij} < 0,\ i = 1, 2 \cdots n$

则该问题没有有限最优解 (val)

否则

$\sigma_j > 0$，x_j 入基

i：$\min\limits_{\bar{a}_{ij} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$ 最小值对应的 i　　$A_B^{-1} b = \bar{b}$

x_i 出

$C_B^T A_B^{-1} b$

初始问题

	C_B^T	C_N^T	
X_B	A_B	A_N	b

初可行解

$\rightarrow$

典则形式：

	0	$C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N$	$z - C_B^T A_B^{-1} b$
X_B	I	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$

$z = C_B^T X_B + C_N^T X_N \Rightarrow z - C_B^T A_B^{-1} b = \underbrace{(C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\text{检验数}} X_N$

Example. $\max.\ z = x_1 + 2x_2$

$x_1 + x_2 \le 3$

$x_2 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

典则

	x_N		x_B		
	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1

出

正比: $\frac{3}{1} > \frac{1}{1}$.

$\Rightarrow$

	1	0	0	-2	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

出

$\Downarrow$

? ① alg finite? (可能 $x_i: x_N \to x_B$ 但 x_i均$=0$)

Bland Rule. 出·入基 总是选下标最小/大

② 初始可行解

$\max.\ c^T x$

s.t. $Ax = b$

$x \ge 0$

人工变量

$Ax + \bar{x}_{m\times 1} = b \ge 0$. 则 $\bar{x} = b \ge 0,\ x = 0$ 但这样可能会有 $\bar{x}$ 的分量不为0

引入 $\min \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i$ ← 先解 (有初始可行解 $\bar{x} = b$)

若最后 $\sum \bar{x}_i > 0 \Rightarrow$ 原?没有可行解

$= 0 \Rightarrow$ 可以把所有 $\bar{x}_i$ 出基, 剩下的基变量就是原?的可行解

另: 罚函数 (M?)

$\max.\ z = c^T b - M \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i$

s.t. $Ax + \bar{x} = b$

$x, \bar{x} \ge 0$

第四讲：线性规划的(基本)对偶理论

一、对偶的引出

Example.

$\max\ 4x_1+x_2+3x_3$

s.t.

$y_1 \to x_1+4x_2 \le 1$

$y_2 \to 3x_1-x_2+x_3 \le 3$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Observation: ①任何一个可行解的目标函数值为最优值的下界

②通过约束的变换得到最优值的上界

$y_1\times①+y_2\times②$ 后 x_i 的系数均要比其中大

$y_1, y_2 \ge 0$ $\quad \min\ y_1+3y_2$ 原规划的对偶

$y_1+3y_2 \ge 4$ → 保证不等号方向(若为等式,则 y 无限制)

$4y_1-y_2 \ge 1$

$y_2 \ge 3$

Example.

利润 产品1

$\max\ 4x_1+3x_2$

材料1

s.t. $2x_1+3x_2 \le 24$

材料2 $5x_1+2x_2 \le 26$

产品1 材料

$x_1, x_2 \ge 0$

shadow price

定价

材料1 y_1

y_2

$\min\ 24y_1+26y_2$

$2y_1+5y_2 \ge 4$

$3y_1+2y_2 \ge 3$

$y_1, y_2 \ge 0$

原始. $\max\ c^Tx$

A的行向量 $a_i^Tx \le b_i$

$a_j^Tx \ge b_j$

$a_k^Tx = b_k$

$x_j \ge 0$

$x_j \le 0$

x_j 无限

对偶 $\min\ y^Tb$

$y_i \ge 0$

$y_i \le 0$

y_i 无正负约束

$A_j^Ty \ge c_j$

$A_j^Ty \le c_j$

$A_j^Ty = c_j$

A:

a_i^T 指行向量

A_j^T 指 A^T 行向量,

即 A 列向量 (每个 x_i 对应一个)

$$(P)\ \max\ c^T x \quad \Longleftrightarrow \quad (D)\ \min\ y^T b$$

$$\text{s.t.}\ Ax \le b \qquad\qquad \text{s.t.}\ A^T y \ge c$$

$$x \ge 0 \qquad\qquad y \ge 0$$

y的个数与P中约束个数相同

二、对偶的性质

1. 自反性

D's D is P.

$$\max\ -y^T b \quad \Rightarrow \quad \min\ -c^T x$$

$$-A^T y \le c \qquad -Ax \ge -b$$

$$y \ge 0 \qquad x \ge 0$$

2. (弱)对偶定理)

：若P和D均有有限最优解,则(P)的任一可行解的目标函数值不大于(D)的任一可行解对应目标函数值

$x_0 \ge 0$ 满足(P)

$y_0 \ge 0$ …… (D)

$$\underbrace{c^T x_0 \le y_0^T A x_0}_{A^T y \ge c} \underbrace{\le y^T b}_{Ax \le b}$$

若 $c^T x_0 = y_0^T b \Rightarrow x_0, y_0$ 为(P)(D)最优解

若一方解 $+\infty/-\infty$, 其D无解 (可能P.D.均无解)

3. 强对偶定理

：若(P)有有限最优解,则(D)亦有,且目标函数值相同

P:

			$y^T b$
	0	$C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N$	$-C_B^T A_B^{-1} b$
X_B	I_m	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$

想找一个满足(D)约束的解

原始最优 $\Rightarrow \begin{cases} C_B^T A_B^{-1} A_N \ge C_N^T \\ C_B^T A_B^{-1} A_B = C_B^T \end{cases}$

$$C_B^T A_B^{-1} A \ge c^T$$

y^T?

检验数 ≤ 0 …… 对偶可行

otherwise 不可行

变换时乘 $C_B^T A_B^{-1} \ge 0$ (否则不等号变向)

≥ 0

目标值相同

令 $y^T = C_B^T A_B^{-1}$ 则 $A^T y \ge c$ 满足约束

$$(P)\text{的最优解} \xrightarrow{\text{构造}} (D)\text{的可行解}$$

↓ …… 由弱对偶

也是OPT

$y^T b = C_B^T A_B^{-1} b$ 原问题的最优函数值!

HW

方程一定要满足

对偶单纯形法：保证检验数≤0（对偶可行），破坏了非负性；逐步让(P)可行

把负的基变量赶出

回顾单纯形表

典则形式

	0	$c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	I	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$

Example.

已经≤0（若不是，做行变换把检验数≤0）

$$\max\ z = -x_2 - 2x_3$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ -4x_2 - 6x_3 + x_5 &= -9 \end{aligned}$$

$x_i \ge 0,\ i = 1 \dots 5$

	0	-1	-2	0	0	
x_1	1	1	1	0	0	5
x_4	0	2	1	1	0	5
x_5	0	-4	-6	0	1	-9 < 0

若均非负 ⇒ 無可行解

$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_4 = 5 \\ x_5 = -9 \end{cases}$ 不可行 ⇒

出基

$(-2) + (-\frac{1}{4}) \times (-6) < 0$ 但 $(-1) + (-\frac{1}{3}) \times (-4) > 0$

选 $\frac{c_i}{a_i}$ 比值最小的

OPT：

	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_1	1	0	-1/2	0	1/4	11/4
x_4	0	0	-2	1	1/2	1/2
x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$

对偶单纯形法

① 初始的单纯形表，保证对偶可行（$\sigma_i \le 0$）

② 检验原始可行性

$A_B^{-1} b \ge 0$ < yes ✓ / No

③ No，基变换　$\exists\ \tilde{A}_i b < 0$ 出基

若 $a_i^T \ge 0$ ⇒ 无解

选 $k = \underset{\tilde{a}_{ij} < 0}{\arg\min} \dfrac{\sigma_j}{\tilde{a}_{ij}}$ 入基，做旋转变换

第五讲：原始-对偶方法

(Prime-Dual)

一、互补松弛定理

若 x. y 分别是 P^*. D^* 的可行解 前提

那么 x. y 最优 $\Longleftrightarrow$ $y^T(Ax-b)=0$, $(y^TA-c^T)x=0$

(P) $\max\ c^Tx$

s.t. $Ax\le b$.

$x\ge 0$

(D) $\min\ y^Tb$

s.t. $A^Ty\ge c$ ($y^TA\ge c^T$)

$y\ge 0$

若 x. y 为可行解 $y^TAx\le y^Tb$

$y^TAx\ge c^Tx$

若 $y^Tb=c^Tx \Longrightarrow y^TAx=y^Tb=c^Tx \Longrightarrow y^T(Ax-b)=0$

$(y^TA-c^T)x=0$

$$\overset{\ge 0}{y^T}\,\overset{\le 0}{(Ax-b)}=0 \qquad \overset{\ge 0}{(y^TA-c^T)}\,\overset{\ge 0}{x}=0$$

Σa_ib_i 若 $a_i\ne 0 \Rightarrow b_i=0$. 最优解中若有分量 $a_i^Tx_i\overset{\text{严格}}{<}b_i$, 则必有 $y_i^T=0$

二、原始-对偶问题方法框架

思路：从 (D) 的一个可行解开始，"寻找"原问题的可行解 x. 满足 $y^T(Ax-b)=0$

$(A^Ty-c^T)x=0$

有解，y. x 最优；否则. 改进 y.

考虑 (P)：$\min\ c^Tx$

s.t. $Ax=b$

$x\ge 0$

(D) $\max\ y^Tb$

s.t. $y^TA\le c^T$

1. 设 y 是 (D) 的一个初始可行解

引进指标集 $J=\{j \mid y^TA_j=c_j\}$ → 对应的 x_j 可以任意取值

2. 找 x 满足 $\begin{cases}Ax=b\\ x_j=0,\ j\notin J\\ x_j\ge 0\end{cases}$

考虑 (RP) $\min \sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i$

restricted

$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j+\bar{x}_i=b_i,\ i=1,2\cdots m$ 行向量

$x_j\ge 0,\ j\in J$

$\bar{x}_i\ge 0,\ i=1\cdots m$

(△ 之前对偶的结论中 (P) 为 max)

① 实际中，有时 DRP 的解可以一眼看出

② 可以直接写 (DRP) 跳过 (RP)

(DRP)

$\max.\ y^Tb$

$y^TA_j\le 0 \quad j\in J$

$y_i\le 1 \quad i=1,\dots m$

(DRP) 的最优解记为 $\bar{y}$ ($y=0$ 是一个可行解)

若 $\bar{y}^Tb=0$ ✓ 否则 $\bar{y}^Tb>0$

能找到

3. 改进 y：$y'=y+\theta\bar{y}$ $\quad \theta>0$

$y'^Tb=y^Tb+\theta\underline{\bar{y}^Tb}>y^Tb$

θ 要让 y' 可行：$y'^TA_j\le c_j \quad j=1\cdots m$

$\Rightarrow y^TA_j+\theta\bar{y}^TA_j\le c_j$

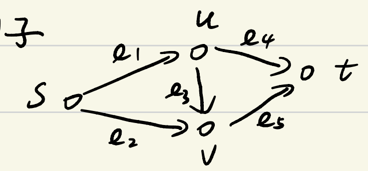
若 $j\in J$ 上式自然成立 ($\bar{y}^TA_j\le 0$)

$j\notin J \quad \theta=\min_{\bar{y}^TA_j>0}\frac{c_j-y^TA_j}{\bar{y}^TA_j}>0$

<0 的没有影响

三、有向图上的最短路问题

1. 例子



$$A=\begin{array}{c}\\ s\\ t\\ u\\ v\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$Af=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{ll}s & 出\\ t & 进\\ u & \\ v & \end{array}$$

$f\ge 0$

希望 $\min_{e\in E} \overset{边权}{c_e} f_e$

2、最短路问题的LP形式

$\min \sum_{e\in E} c_e f_e$

s.t. $Af = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}s\\t\\ \\ \\ \end{array}$

$f \geq 0$

A的行向量$\Sigma = 0 \Rightarrow$线性相关.去掉t一行.

(P) $\min \sum_{e\in E} c_e f_e$

s.t. $A'f = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}^{s}$

$f \geq 0$

: $f_{i,j} \in \{0,1\}$

不用.若有分数解$\Rightarrow$必有整数解

(D) $\max\ y_s$

s.t. $y_i - y_j \leq c_{ij}$　　$e=(i,j)\in E,\ j\neq t$　　$y_i - y_j \leq c_{ij}$

$y_i \leq c_{it}$　　$y_t = 0$

$c_{ij} \geq 0$

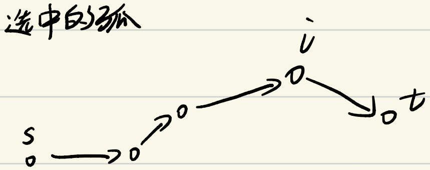
$J = \{(i,j) \mid y_i - y_j = c_{ij}\}$

(DRP) $\max\ y_s$

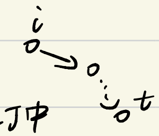
s.t. $y_i - y_j \leq 0,\ (i,j)\in J$　　选中的弧

$y_i \leq 1$

$y_t = 0$



$y_s \leq \cdots \leq y_i \leq y_t = 0$



DRP的一个最优解① 若 $i \to \cdots \to t$ (在J中) 则 $y_i = 0$

② 否则 $y_i = 1$

不用解,只用看是否$\exists$ $s \to \cdots \to t$ (J中)

有$\Rightarrow$ $y_s = 0$. OPT.

无$\Rightarrow$ $y_s = 1$. 继续提升

3、改进 y : $y' = y + \theta\tilde{y}$　$\theta > 0$

$y'^T b = y^T b + \theta \underline{\tilde{y}^T b} > y^T b$

θ要让y'可行: $y'^T A_j \leq c_j$　$j = 1 \cdots m$

$\Rightarrow y^T A_j + \theta \tilde{y}^T A_j \leq c_j$　　$y_i - y_j \leq 0$

若 $j \in J$　　上升自然成立($\because \tilde{y}^T A_j \leq 0$)　　(若原图中 $s \to t$ 不联通?)

$j \notin J$　　$\theta = \min\limits_{\tilde{y}^T A_j > 0} \dfrac{c_j - y^T A_j}{\tilde{y}^T A_j} > 0$　$\left(\dfrac{c_{ij} - (y_i - y_j)}{\tilde{y}_i - \tilde{y}_j}\right)$　$\tilde{y}_i = 1,\ \tilde{y}_j = 0$

< 0的没有影响

$O(|V|)$.　一个顶点在DRP里$\tilde{y}_i = 0$,则以后均取0

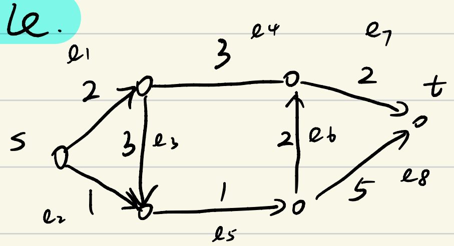
若 $(i,j) \in J$ $\quad y_i - y_j = c_{ij}$

$$y_i' - y_j' = (y_i - y_j) + \theta\underbrace{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)}_{=0}$$

可以构造出(DRP)的一个解

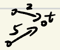
(在J中,要么同时为0,要么同时为1)

Example.



① $y = (0,0,0,0,0)^T \quad J = \phi \ (\because c_{ij} \neq 0)$

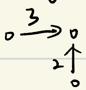
$\tilde{y} = (1,1,1,1,1)^T$

只用考虑 

② $\theta = 2 \quad (e_7) \quad J = \{e_7\}$

$y = (2,2,2,2,2)^T \qquad J = \{e_7\} \quad (\because y_4 - y_t = 2)$

$\tilde{y} = (1,1,1,0,1)^T$



$\theta = 2 \qquad y = (4,4,4,2,4) \qquad J = \{e_6, e_7\}$

第六讲： ILP 整数线性规划

一、若干例子

1. 最大权匹配

$G=(V,E)$

$w: E \longrightarrow Z^+$

$\max. \sum_{e\in E} w_e x_e$ ， $x_e = \begin{cases} 1 & e\in M \\ 0 & e\notin M \end{cases}$

s.t. $\sum_{u\in e} x_e \le 1 \quad \forall u\in V$ 一个点相邻的边最多选一条

$x_e \in \{0,1\}$

2. 背包问题

$C \quad (s_i, p_i) \quad i=1,2\dots n$

$\max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

s.t. $\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le C$ ……… packing 约束 ¦ 若 $\ge$ … cover 约束

$x_i \in \{0,1\}$

若加一条约束： $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \le D$ ……… 二维背包问题

若有m个背包： $\max \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_i$

s.t. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} s_i \le C_j \quad \forall j$ 对每个背包

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le 1 \quad \forall i$ 一个物品只能装一次

3. 装箱问题

$a_1 \cdots a_n$

c

$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$ ……第i个箱子用？不用？

s.t. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j=1,2\dots n$ 第j个物品装一次

$\sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \le c\cdot y_i \quad i=1,2\dots n$ 第i个箱子

4. TSP

完全图

$G = (V, E)$

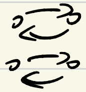
$c: E \to Z^+$ 满足三角不等式

$V = \{0, 1, 2 \cdots n\}$ Hamilton cycle. min cost

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

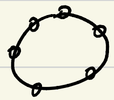
s.t. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$. $j = 0, 1 \cdots n$ 入度为1

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$. $i = 0, 1 \cdots n$ 出度为1

? 可能有小圈 e.g. 

辅助变量 u_i $(i = 1 \cdots n)$ no u_0

引入约束 $u_i - u_j + n x_{ij} \le n-1$ $i \ne j$. $i,j = 1 \cdots n$

若有一个圈不含'0'. 

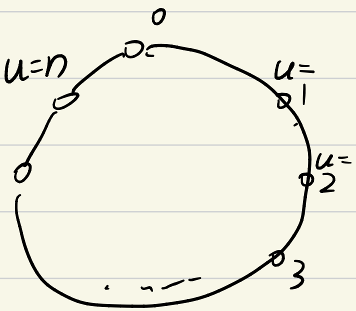
k个点，k个约束

相加：$nk \le (n-1)k$

∴不存在！

即加上约束后，可行解一定是 Hamilton 圈

(每一个圈都包含'0')

$\forall$ H-C 

构造 u_i 的取值

这样满足约束 $\begin{cases} x_{ij} = 1 & u_i - u_j = -1 \\ x_{ij} = 0 & u_i \in [1, n]. \ u_i - u_j \le n-1 \end{cases}$

即加上约束后，原有的 H-C 不会被消灭

二、求解ILP的基本框架

- 线性规划 松弛
  - LP-Relaxation
- 舍入(Rounding)
- 利用整数性质

1. 什么时候 LP 直接给出整数最优解.

$Ax=b$ $\quad \begin{cases} x_B = A_B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{cases}$

$A_B^{-1} = \dfrac{A_B^*}{|A_B|}$ 只要 $|A_B| = \pm 1 \Rightarrow A_B^{-1}$ 为整数矩阵 $\Rightarrow x_B$ 为整数

单位模矩阵: $|A|=1$

全单位模(TUM): A的所有非奇异子方阵均为单位模

若 A 是 TUM, 则 (A, I) 也是 (用于加松弛变量)

↓ 单个元素也是子方阵 $\Rightarrow$ 元素只有 $\pm1, 0$

(proof: 按列展开)

定理: A的元素有 $0, \pm1$. 若A中每列的非零元素至多2个, 且A的行向量, 可以分成两个不交的子集 I, J, 有

① 若某列含 $(1,1)$ / $(-1,-1)$, 则对应行分居 I 和 J

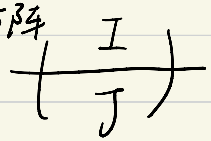
② ······ $(1,-1)$ ······同居一个 I/J

则 A 是 TUM

归纳法 ① $k=1$ ✓
② k ✓ $\rightarrow k+1$
若有一列只有一个非零元素, 展开 $\Rightarrow k$ ✓

否则 上半(I)相加 = (J)相加 $\Rightarrow$ 线性相关

子方阵



有一个·展开.
既有 I 又有 J $\Rightarrow$ 奇异

有向图关联矩阵、二部图关联矩阵 $\Rightarrow$ TUM

三、基本算法

1. Gomory 割平面法 (1958)

$$ILP \xrightarrow[\text{(把} \mathbb{Z}\text{约束去掉)}]{relaxation} LP$$

解完 LP $\quad x_i + \sum_{k=m+1}^{n} \bar{a}_i x_k = \bar{b}_i \rightarrow$ 非整数 $(\bar{b}_i > 0)$

↓ 下取整 $\quad x_i + \sum \lfloor \bar{a}_i \rfloor x_k \le \bar{b}_i$ $\quad$ 整数 (挑出非整数解)

$$\begin{cases} x_i + \sum \lfloor \bar{a}_i \rfloor x_k \le \lfloor \bar{b}_i \rfloor & \text{不会消灭整数解} \\ x_i + \sum a_{ik} x_k = b_i \end{cases}$$

→ 相减得: $\sum_{k=1}^{n} (\bar{a}_{ik} - \lfloor \bar{a}_{ik} \rfloor) x_k \ge \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$

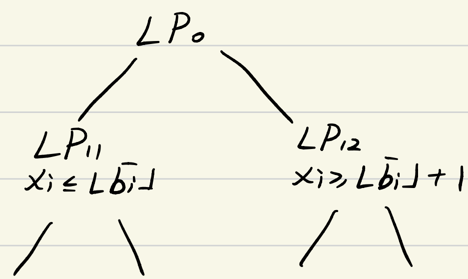
用新约束~~代替~~原约束 加入到原约束中

└ 指 $x_i + \sum \lfloor \bar{a}_i \rfloor x_k \le \lfloor b_i \rfloor$

2. 分枝定界 (Branch & Bound) $\quad$ Land. Doig 1960

$$\min \; c^T x$$
$$\text{s.t.} \; Ax = b$$
$$x \ge 0$$

解 LP_0 设 $x_i = \bar{b}_i > 0$ (非整数)



add $\quad LP_{11}$: $x_i \le \lfloor \bar{b}_i \rfloor$ $\quad LP_{12}$: $x_i \ge \lfloor \bar{b}_i \rfloor + 1$

Bound: 下界 (还有没有继续向下的必要) $\quad$ LP最优值 (当前分支中最好的值) "root"

上界 $\quad$ 上述整数可行解中最小值

①某枝算出整数解　　明枝
某枝无可行解

②某枝当前目标函数值 $\geq$ 上界　　枯枝

other：活枝

Example

上下界交换

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -4x_1 + 2x_2 \leq -1$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$-2x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$x = (1.5, 2.5)^T$ $z = \overline{4}$ (上界)

$x_1 \leq 1$: $(1, 1.5)^T$ $z = 2.5$ 枯枝！

$x_1 \geq 2$: $(2, 1.5)$ $z = \overline{3.5}$ (3也是上界 ∵ $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$)

$x_2 \leq 1$: $(2.25, 1)$ $z = \overline{3.25}$

$x_2 \geq 2$: 无解

$x_1 \leq 2$: $(2, 1)^T$ $z = \underline{3}$

$x_1 \geq 3$: 无解

第七讲 LP-based 近似算法

一、近似比

I （极小化） r-近似：$A(I) \le r \cdot OPT(I) \quad \forall I$

A （多项式时间算法） $\rho = \inf \{ r \mid A(I) \le r \cdot OPT(I) \ \forall I \}$

$\Leftrightarrow \rho = \sup_I \frac{A(I)}{OPT(I)}$

最好的近似：$\forall \varepsilon > 0 \quad A_\varepsilon(I) \le (1+\varepsilon) OPT(I) \quad \forall I$

PTAS "多项式时间近似方案" $O(|I|^{f(\varepsilon)})$

effecient EPTAS $O(f(\frac{1}{\varepsilon}) |I|^{O(1)})$

fully FPTAS $O((\frac{1}{\varepsilon})^{O(1)} |I|^{O(1)})$ constant

在复杂性假设下（即 $P \ne NP$）

（有的问题）

No PTAS/EPTAS/FPTAS $\Leftarrow$ $P \ne NP$

No $(1+\varepsilon)$-近似

二、算法框架

极小化问题 $ILP \xrightarrow{\text{松弛}} LP$

x^*_{ILP} $x^*_{LP} \xrightarrow[\text{Rounding}]{\text{舍入}} x_{ILP}$

C^*_{ILP} C^*_{LP} C_{ILP}

$\forall I$

$\underbrace{\frac{C_{ILP}}{C^*_{ILP}}}_{?} \le \frac{C_{ILP}}{C^*_{LP}} \ge \boxed{\frac{C^*_{ILP}}{C^*_{LP}}} \to$ 整数间隙 Integrality Gap

注意到

（若 gap 太大，则近似比可能也很大 → 模型不好）

近似比不会优于 Gap. ?

$IG=2 \Rightarrow$ ① $\forall$ instances $\frac{C^*_{ILP}}{C^*_{LP}} \le 2$
② 找一个 instance $= 2$

三、例子

1. 背包问题

$$\max. \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C$$
$$0 \le x_i \le 1 \ (x_i \in \{0,1\})$$

e.g. size value: $(\frac{C}{2}, C)$, sz v: $(\frac{C+1}{2}, C)$

$$\frac{LP \cdots C + \frac{C}{C+1}C}{ILP \cdots C} = 1 + \frac{C}{C+1} \to 2$$

$IG \ge 2$

① ≤ 2: a. 性价比前 k 个 + b. 第 $k+1$ 个) 可行解

$\sum_{i=1}^{k} s_i + \alpha s_{k+1} = C$ ($0<\alpha<1$)

value $a. + b. > C^*_{LP}$

$\therefore C^*_{ILP} >$ better of $a.b. > \frac{C^*_{LP}}{2}$

2. 负载均衡

m 台机器, n 个任务, 第 j 个任务若安排在第 i 台机器上完成占用的负载 $P_{ij} \in Z$

$$\min \ t$$
$$s.t. \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \ j = 1,2\cdots n$$
$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} x_{ij} \le t, \ i = 1,2\cdots m$$
$$x_{ij} \in \{0,1\} \xrightarrow{relax} x_{ij} \ge 0$$

$\min_{i=1\cdots m} P_{ij}, \ j=1,2\cdots n$

$IG \le m$ (每个任务放最有效的机器)

gap: m e.g. 若 $n=1$. $P_{i1} = m$ ILP: m, LP: 1 分成 m 份

maxmin 圣诞老人

另一种做法: minmax

$0 \le t^* \le \sum P_{ij}$

LP上 (二分)猜 t LP 去找有无可行解 有 无

猜 t 后我们要求 $x_{ij} = 0$ if $P_{ij} > t$, 再找可行解

上界: greedy alg $\log n$ 猜解

下界: $\min_{i,j} P_{ij}$

若 $P_{ij} = P_{i'j} \Rightarrow$ PTAS

……… 机器数是常数 $\Rightarrow$ FPTAS

找到最优 t^* 若 $x_{ij} > 0 \Rightarrow P_{ij} \le t^*$

有多少工件被拆分?

x^* $n+m$ 基变量 $\Rightarrow x^*_{ij} > 0$ 正分量 $\le n+m$

n_1: 整工件个数 $x^*_{ij} = 1$: 整工件

n_2: 拆分工件个数 $0 < x^*_{ij} < 1$: 拆分工件 ↳ 至少对应两个分量

∴ $n_1+n_2=n$

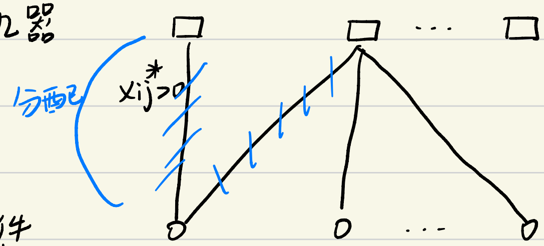
$n_1+2n_2\le n+m \Rightarrow \boxed{n_2\le m}$

拿出这m个工件，再放回去

∵ $p_{ij}\le t^*$

若一对一放回到m个机器（且曾经放过） $\Rightarrow \le 2t^*$

$x_{ij}^*>0$ 就有 $i\leftrightarrow j$ 的边 $\Rightarrow$ $n+m$个顶点，$n+m$条边二部图



?

若联通 $\Rightarrow$ 树/伪树

"assume" 每个联通分支是伪树

一度顶点 $\Rightarrow$ 必为机器节点.

分配机器和对应工件以及边

去掉至少2条边

$\frac{3}{2}\sim 2$

最后得到了一个圈：偶圈，把机器工件一一对应

└完美分配

why do this?

why not do that? (only do this)

第八讲：原始－对偶近似算法

一、互补松弛条件的"拓展"

(P) $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

s.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i=1\cdots m$

$x_j \geq 0 \quad j=1\cdots n$

(D) $\max \sum b_i y_i$

s.t. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j=1\cdots n$

$y_i \geq 0 \quad i=1\cdots m$

x.y 为最优 $\Leftrightarrow$ $\forall 1\leq j\leq n.\ x_j>0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

$\forall 1\leq i\leq m.\ y_i>0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

若要求 x_j 为整数. 则互补松弛条件要有一定松弛 (x.y 可行) ?

① $\exists \alpha \geq 1$.

$x_j = 0$ 或 $\frac{c_j}{\alpha} \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j$

② $\exists \beta \geq 1$

$y_i = 0$ 或 $b_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \beta b_i$

松弛后近似比为 $\alpha\cdot\beta$

则 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \alpha \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j$

$= \alpha \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i$

$\leq \alpha\beta \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i}_{OPT_D} \leq \boxed{\alpha\beta} \cdot OPT_P$

(P)的OPT $\geq$ (D)的OPT

二、集合覆盖 (Set Cover)

Input： E 基本元素集

$U \subseteq 2^E$

$C: U \longrightarrow Z^+$

Output： U 中费用最小的子集 $\{S_{i_1} \cdots S_{i_p}\}$ 使得 $\bigcup_{l=1}^{p} S_{i_l} = E$

(顶点覆盖是 Set Cover 特殊情况)

E：边

U：{每个点邻接边集}

超图 ✓

$$\min_{S\in U} c(S)x_S$$

对偶变量 y_e

$$\text{(P)}\quad \text{s.t.} \sum_{S:e\in S} x_S \ge 1,\quad \forall e\in E \qquad\qquad \text{(D)}\quad \max \sum_{e\in E} y_e \quad \text{s.t.} \sum_{e\in S} y_e \le c(S),\ S\in U,\quad y_e\ge 0$$

行：被哪些集合包含
列：集合包含哪些元素 $\quad x_S\in\{0,1\} \xrightarrow{\text{relax}} x_S\ge 0$

$\forall S\in U.\quad x_S\ne 0 \Rightarrow \sum_{e\in S} y_e = c(S)$ （α取1）

$\forall e\in E\quad y_e\ne 0 \Rightarrow 1\le \sum_{S:e\in S} x_S \le f$ —— 最大频次 $f=\max_{e\in E}\sum_{S:e\in S} 1$

若能构造这样 sol. 则近似比 $= f$
（顶点覆盖 2-近似）

要求满足互补松弛条件，不断改进对偶可行解

不用解 DRP

初始步： $y_e=0,\ e\in E \Rightarrow x_S=0$ 原始不可行 $\quad\because c(S)>0$，不紧

$E'=E$ 未被cover的集合

迭代步：找 $e\in E'$，提升 y_e 直到对偶某约束变紧

$\exists S.\ \sum_{e\in S} y_e = c(S) \xRightarrow{\text{令}} x_S=1$ 被 S 覆盖的先从 E' 中去掉 $\quad E'=E\setminus F$

直到 $E'=\phi$

（一直对偶可行，且已经紧的不会变松）

Example

$E=\{e_1,\cdots e_{n+1}\}$

$U=\{(e_1,e_n)\cdots\cdots(e_{n-1},e_n),\ (e_1,\cdots e_{n+1})\}$ （代价：1，…，1，$1+\varepsilon$）

⚠ 此时 (P) OPT ≠ (D) OPT

若先提升 e_n，再 e_{n+1}：$(n-1)+(1+\varepsilon) = n+\varepsilon$

$\frac{n+\varepsilon}{1+\varepsilon}\to n \quad e_n$出现了 n 次

三、选址问题 (无容量)

D: 客户

F: 设施候选集合 f_i: 费用 > 0

开设设施

$\min \sum_{i\in F} f_i y_i + \sum_{\substack{i\in F\\ j\in D}} c_{ij}x_{ij}$ → 客户到设施接受服务 e.g. distance

"就近"

(P) v_j s.t. $\sum_{i\in F} x_{ij} = 1 \quad j\in D$ 所有人都要被服务

w_{ij} $y_i \geq x_{ij} \quad i\in F, j\in D$ 客户被分配的设施必须开设

$y_i, x_{ij} \in \{0,1\}$

↓

松弛: $x_{ij}, y_i \geq 0$

"四边不等式"

客户 — 设施

客户 — 设施

约束 — 对偶变量

乘约束右值 $\max \sum_{j\in D} v_j$

列向量 ≤ s.t. $\sum_{j\in D} w_{ij} \leq f_i \quad i\in F$ 关于 y_i

$v_j - w_{ij} \leq c_{ij} \quad i\in F, j\in D$

$w_{ij} \geq 0$

互补松弛:

即 $\frac{c_{ij}}{3} \leq v_j - w_{ij} \leq c_{ij}$ 部分松弛,但近似比仍为3

(1) $\forall i\in F, j\in D$ 若 $x_{ij} > 0 \Rightarrow v_j - w_{ij} = c_{ij}$ $\alpha = \frac{1}{3}$

(2) $\forall i\in F$ 若 $y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j\in D} w_{ij} = f_i$

w_{ij} 可看作 j 向 i 的集资

(3) $\forall i\in F, j\in D$ 若 $w_{ij} > 0 \Rightarrow y_i = x_{ij}$

$\boxed{y_i = 1, x_{ij} = 0 \Rightarrow w_{ij} = 0}$

找到可行解
⇓
NP-Hard → 松弛部分约束 ((1))

原始对偶算法: (Jain)

第一阶段

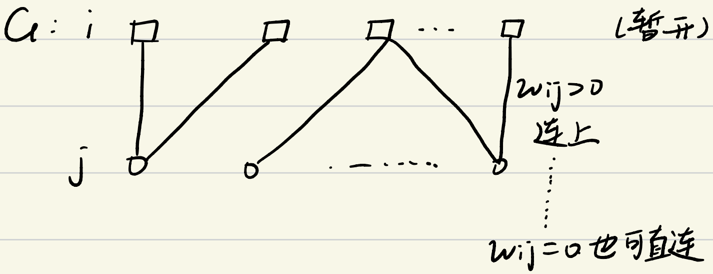
- 初始 $\forall i,j$ $v_j=0,\ w_{ij}=0$ 对偶可行解
  则 $y_i=0,\ x_{ij}=0$ ……… $\because f_i, c_{ij}>0$
  (P)不可行

- 迭代步: 等速提升 v_j (DRP 是用来提升的,这里可以直接↑. 不用DRP) v_j: 路费
  直到 某些约束 满足 $v_j=c_{ij}$. 启动紧约束中的 w_{ij}. 继续提升 ($w_{ij}+\forall v_j$ ↑)
  紧边

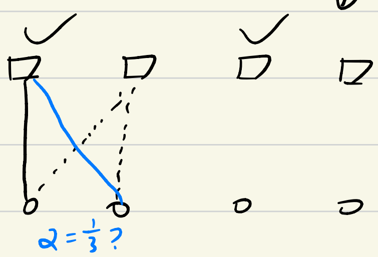
  对紧边, w_{ij} 与 v_j 一起等速提升.
  直到某些设施 i: $\sum_{j\in D} w_{ij}=f_i$. 停! 这些设施称为"暂时开设", 满足 $v_j-w_{ij}=c_{ij}$ 的顾客 j 称为连上
  ?
  连上的顾客 v_j 不再提 w_{ij}
  直到所有顾客和设施都连上
  最多 $\min(|D|,|F|)$ 次

第二阶段

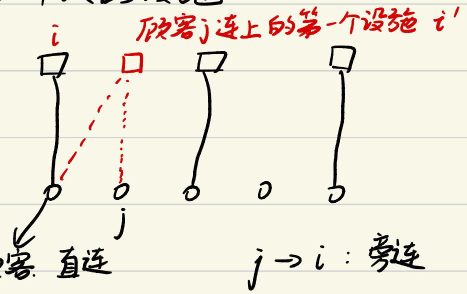
约束(3): 可能有人出了多地钱,但没有被服务 ($\because$ 只能连一个)
⇓
只准开一个



G^2: 找设施顶点诱导的极大独立集 — 最终开设的设施
设施间有边 (若 G 中有同一个顾客)
子图 H

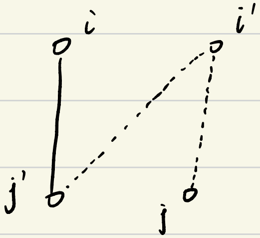


最终开设的设施



$\to w_{ij} = 0$（否则从直连）

引理：对旁连顾客j，$j \to i$（$\sigma(j) = i$），则有 $c_{ij} \le 3v_j$



（i' 连上第一个，不一定 $w_{i'j} > 0$）

四边不等式

$c_{ij} \le c_{i'j} + c_{ij'} + c_{ij'}$

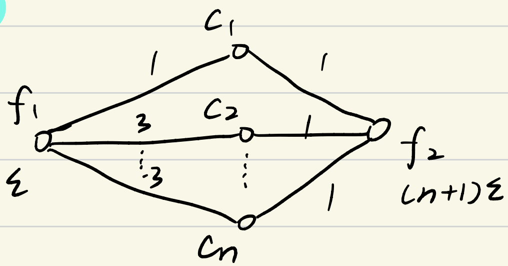
注意：j'连上了i；j连上了i'

$c_{i'j} \le v_j$，$c_{i'j'} \le v_{j'}$ $c_{ij'} \le v_{j'}$

则有 $c_{ij} \le v_j + 2v_{j'} \overset{?}{\le} 3v_j$ （$v_{j'} \overset{?}{\le} v_j$）

若 $w_{i'j'} > 0$：则 j'一定比j先停 （j 先连上i'？

Example.



开f_2

OPT：$n + (n+1)\varepsilon$

alg：选f_1：$\varepsilon + 1 + 3(n-1) = 3n - 2 + \varepsilon$

第九讲：贪心算法

一、独立系统

E. 基本元素集

$C: E \longrightarrow R^+$ 最小独立集

$\mathcal{F} \subseteq 2^E$ 满足　(M_1): $\phi \in \mathcal{F}$

(M_2): 若 $\underline{X} \in \mathcal{F}$. $Y \subseteq \underline{X}$. 则 $Y \in \mathcal{F}$　　关于包含封闭

称 $(E, \mathcal{F})$ 为独立系统

若干定义：

独立集：$\underline{X} \in \mathcal{F}$，即 $\mathcal{F}$ 中的元素

基：极大独立集（加入任何一个元素就不再是独立集）

相关集：$\underline{X} \subseteq E$ 但 $\underline{X} \notin \mathcal{F}$ （$2^E \setminus \mathcal{F}$ 中的元素）

圈：极小的相关集

对 $F \subseteq E$，F 的基：$\underline{X} \subseteq F$，$\underline{X} \in \mathcal{F}$ 极大独立集（限制在 F 上）

：$\underline{X} \subseteq F$. $\underline{X} \in \mathcal{F}$. $\forall Y \in \mathcal{F}$. $Y \neq \underline{X}$. $Y \subseteq F$ 有 $Y \not\supset \underline{X}$（即没有独立集 $\supset B$）基

e.g. $E = \{1, 2, 3 \cdots 10\}$　$\mathcal{F} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \underbrace{\{1,2\}}_{极大}, \{3\}\}$

对 $(E, \mathcal{F})$，$F \subseteq E$，秩 $r(F) = \max\{|\underline{X}|, \underline{X} \subseteq F. \underline{X} \in \mathcal{F}\}$　F 中最大独立集元素个数

下秩 $\rho(F) = \min\{|Y|, Y 是 F 的基\}$　F 中最小极大独立集…

秩商：$\min\limits_{F \subseteq E} \dfrac{\rho(F)}{r(F)} \triangleq q(E, F)$

二. 基本优化问题

1. 极大化问题

set内费用之和

给定 $(E,\mathcal{F})$ $c: E \to R^+$. 求 $\bar{x} \in \mathcal{F}$ 使得 $c(\bar{x})$最大 （权重最大的独立集）

2. 极小化问题

给定 $(E,\mathcal{F})$. $c: E \to R^+$. 求基 $B \in \mathcal{F}$, 使得 $c(B)$最小 （权重最小的极大独立集）

三. 若干优化问题

1. MST

$G=(V,E)$ 连通图

$E = E(G)$

$\mathcal{F} = \{\bar{x} \subseteq E \mid \bar{x}$是森林$\}$ 极大独立集是树

$q(E,\mathcal{F}) = 1$

2. 最短路

$G=(V,E)$ $s,t \in V$

$E = E(G)$

$\mathcal{F} = \{\bar{x} \subseteq E \mid \bar{x}$是某条 $s-t$路的边子集$\}$

3. 最大权匹配

$G=(V,E)$

$E = E(G)$ $\mathcal{F}$定义为解的子集？

$\mathcal{F} = \{M \subseteq E \mid M$中的边无公共端点.$\}$

4. 顶点覆盖

$G=(V,E)$

$E = V(G)$ 去掉某个点，就无法cover

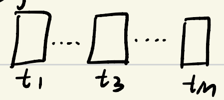
$\mathcal{F} = \{U \subseteq V \mid U$是某极小顶点覆盖的子集$\}$

5. 装箱问题

每个箱子有 M. patterns 可行方案.

$T=\{t_1,\dots,t_m\}$ ⟶ 整个例子可行解

e.g.



物品不能重复

构形 configuration

$E=T$ $\quad c(t_i)=1$

$\mathcal{F}=\{P \mid P$ 是某个 configuration 的子集$\}$?

四. 贪心算法

1. 极大化问题 Best-In 优胜法

(1) $c(e_1)\ge c(e_2)\ge\cdots\ge c(e_n)$ 排序（假设 $|E|=n$.）

(2) $F=\phi$

(3) For $i=1$ to n do

if $\boxed{F\cup\{e_i\}\in\mathcal{F}.}$ set $F=F\cup\{e_i\}$

oracle

2. 极小化问题 Worst-Out 劣汰法

(1) 同上

(2) $F=E$

(3) for $i=1$ to n do

if $\boxed{F\setminus\{e_i\}\text{ 含某个基}}$ set $F=F\setminus\{e_i\}$

相关集不一定包含基

3. Best-In的性能分析

定理 (Jenkyns 1976　Korteord　Flausmann 1978)

极大化问题：　设 $(E, \bar{f})$ 是一个独立系统．　$G(E, \bar{f}, c)$ 表示 Best-In (greedy) 目标函数值

$OPT(E, \bar{f}, c)$ … 最优 ……

则 $\delta(E, \bar{f}) \le \dfrac{G(E, \bar{f}, c)}{OPT(E, \bar{f}, c)} \le 1 \qquad \forall c: E \to R^+$

$\exists c$. 下界 $\delta(E, \bar{f})$ 可以达到　("紧的")

证明：G_n. Best-In 的解

O_n. OPT

$E_j = \{e_1, \cdots e_j\}$ ---是 E_j 上独立集　∴ $|O_j| \le r(E_j)$

$G_j = G_n \cap E_j$, $O_j = O_n \cap E_j$　$j = 1, 2 \cdots n$

G_j 是 E_j 上极大独立集 ⋮ 不然？

∴ $|G_j| \ge \rho(E_j)$

$G(E, \bar{f}, c) = \sum_{j=1}^{n} (|G_j| - |G_{j-1}|) \cdot c(e_j)$　选：1　不选：0

$G_0 = \phi \quad c(e_{n+1}) = 0$

$= \sum_{j=1}^{n} |G_j| (c(e_j) - c(e_{j+1}))$　　$\delta(E, \bar{f}) \le \dfrac{\rho(E_j)}{r(E_j)}$

$\ge \sum_{j=1}^{n} \rho(E_j) (c(e_j) - c(e_{j+1}))$

$\ge \delta(E, \bar{f}) \sum_{j=1}^{n} r(E_j) (c(e_j) - c(e_{j+1}))$

$\ge \delta(E, \bar{f}) \sum_{j=1}^{n} |O_j| (c(e_j) - c(e_{j+1}))$ ……展开回去

$= \delta(E, \bar{f}) \cdot OPT(E, \bar{f}, c)$

紧的例子

设在 $F \subseteq E$. 有基 B_1, B_2　有 $\delta(E, \bar{f}) = \dfrac{|B_1|}{|B_2|}$

令 $c(e) = 1, e \in F$; $c(e) = 0, e \notin F$

把 B_1 元素放前, B_2 放后 (均在F中)

则 $G(E, \bar{f}, c) = |B_1|$. 但 $OPT(E, \bar{f}, c) = |B_2|$

4. Worst-Out 性能分析

定理：(Korte and Monma 1979)

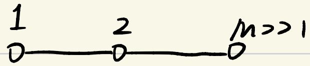
设 $(E,\mathcal{F})$ 为一独立系统，$c: E\to R^+$

对偶的下秩/秩

有 $1\le \dfrac{G(E,\mathcal{F},c)}{OPT(E,\mathcal{F},c)} \le \max\limits_{F\subseteq E} \dfrac{|F|-\rho^*(F)}{|F|-r^*(F)}$ $\exists c$ 上界紧

Example

max (1) 极小顶点覆盖的最大权问题 → 用 worst-out



min (2) 极大顶点独立集的最小权问题 → 用 best-in

(1) $OPT = m+1$ worst-out: 2

(2) $OPT = 2$ best-in: $m+1$

可能很差

五. 秩商估计式

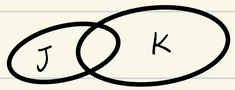
定理 (Hausmann, Jenkgens Korte 1980)

此圈即彼圈

MST中 $p=1$?

设 $(E,\mathcal{F})$ 为一个独立系统，若 $\forall X\in\mathcal{F}$，$\forall e\in E\setminus X$，则 $X\cup\{e\}$ 至多含 p 个圈，那么 $q(E,\mathcal{F})\ge\frac{1}{p}$

$\forall F\subseteq E$，K，J 是其任意两个极大独立集，$|J|/|K|\ge\frac{1}{p}$



从 K 出发，添加 K 外的元素 $(J\setminus K)$ ⟹ 圈

破圈时，删掉 K 中元素 (最多 p 条) ⟹ 独立集

$K\to\cdots\cdots\to J$ K中，不在 J 中

补：独立系统的对偶

$(E,\mathcal{F})$ 基 B ⟹ $E\setminus B$ 是 $(E,\mathcal{F}^*)$ 的基

某一个基的补集的子集

$\mathcal{F}^* = \{Y\subseteq E \mid \exists (E,\mathcal{F})\text{的基} B \text{ 有 } Y\cap B=\emptyset\}$

对偶的对偶

结论：$(E, \overline{\mathcal{F}}^{**}) = (E, \overline{\mathcal{F}})$

证明：$\forall Y \in \overline{\mathcal{F}}^{**} \Leftrightarrow \exists (E, \overline{\mathcal{F}}^{*})$ 的基 B^{*}. $Y \cap B^{*} = \phi$?

$\Leftrightarrow \exists (E, \overline{\mathcal{F}})$ 的基 B. $Y \cap (E \setminus B) = \phi$

$\Leftrightarrow \exists (E, \overline{\mathcal{F}})$ 的基 B $Y \subseteq B$: $Y \in \overline{\mathcal{F}}$

第十讲：拟阵 (Matroid)

一. 定义

(M_3) 若 $X, Y \in \overline{\mathcal{F}}$, $|X| > |Y|$ 则 $\exists e \in X \setminus Y$, $Y \cup \{e\} \in \overline{\mathcal{F}}$ Y不是基

独立系统

满足 $(M_1)(M_2)(M_3)$ 的称为拟阵

(M_3') ……………, $|X| = |Y| + 1$ ……………

(M_3'') 对 $\forall F \subseteq E$. F 的基有相同的元素个数 (秩商 = 1)

e.g.
$\{1 \cdots 6\}$
$\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$

$(M_3'') \Leftrightarrow (M_3') \Leftrightarrow (M_3)$

$\rightarrow$: $X \cup Y \subseteq E \Rightarrow Y$ 不是 $X \cup Y$ 上的基. 则 Y 可扩充 (从 $X \cup Y$ 中)

拟阵的对偶也还是拟阵 $\Rightarrow$ Best-In $=1$

Worst-Out: $\max \frac{|F| - \rho^{*}(F)}{|F| - r^{*}(F)} = 1$

即既可以用 Best-In, 也可用 Worst-Out (如 MST)

二. 拟阵的例子

1. 生成树 (图拟阵)

2. 无关向量 (向量拟阵)

$\overline{\mathcal{F}} = \{$线性无关的向量组$\}$

3. 一致拟阵

E: 元素集 $k \in \mathbb{Z}^{+}$ $\overline{\mathcal{F}} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq k\}$

一致矩阵的推广

4. 给定 无向图 $G = (V, E)$ 及图上的一个"顶点独立集" S

加一条边只影响一个点 $|\delta_X(u)|$

$E = E(G)$ $k_u \in \mathbb{Z}^{+}$ 对 $\forall u \in S$

$\overline{\mathcal{F}} = \{X \subseteq E \mid |\delta_X(u)| \leq k_u, u \in S\}$ S 中点的邻接边数 $\leq k_u$

是拟阵 (证: $X, Y \in \overline{\mathcal{F}}$, $|X| > |Y|$. 把 $|\delta_X(u)| < k_u$ 的边加入 Y.

三. 拟阵的交

$(E, \bar f_1 \cap \bar f_2)$ 拟阵的交不一定是拟阵

定理：任何一个独立系统，可以表示为有限个拟阵的交

证明：C_i 为 $(E, \bar f)$ 上任一个圈 $i=1,2\cdots m$

$\bar f_i = \{\bar X \subseteq E \mid C_i \setminus \bar X \neq \phi\}$ $\bar X$ 没有包含 C_i 中所有元素

① $(E, \bar f_i)$ 是拟阵

② $\bigcap_{i=1}^{m} \bar f_i = \bar f \longrightarrow \forall \bar X$ 不包含任何一个 C_i, ∴ $\bar X \in \cap \bar f_i$

$\downarrow$ $\bar X$ 不包含 $C_1 \cdots C_i$ 任何一个圈   ∴ $\bar X \in \bar f$ 是独立集

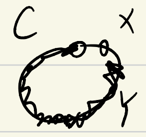
证①：若 $\bar X, Y \in \bar f_i$, $|\bar X| > |Y|$. $C_i \setminus \bar X \neq \phi$. $C_i \setminus Y \neq \phi$

若 $\bar X \supseteq Y$. trivial

(a) 若 $\exists e \in \bar X \setminus Y$, $e \notin C_i$ 则 $Y \cup \{e\} \in \bar f_i$

(b) 若 $\forall e \in \bar X \setminus Y$, $e \in C_i$ $|C_i \setminus Y| \geq 2$ ✓   ?

(若 $=1$)



四. 秩商估计式

若 $(E, \bar f)$ 是 p个拟阵的交，则 $\delta(E, \bar f) \geq \frac{1}{p}$ (∵ 拟阵中 $\forall \bar X$. $\bar X \cup \{e\}$ 至多有 $p=1$ 个圈)

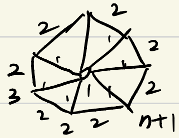
Example. 二部图 $G=(V,E)$. $\bar f = \{M \subseteq E \mid M$ 是 G 中的匹配$\}$ 是两个拟阵的交.

$\bar f_1 = \{\bar X \in E \mid |\delta_{\bar X}(u)| \leq 1, u \in A\}$ $\bar f_2 = \{\bar X \subseteq E \mid |\delta_{\bar X}(v)| \leq 1, v \in B\}$

第十一讲：限制的方法 Steiner 树问题

一.定义

$G=(V,E)$ 完全赋权图，满足度量矩离. 给定顶点集合 $\bar{V}\subseteq V$，试求最短网络，连接 $\bar{V}$ 中的点

e.g. 

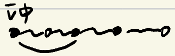
连 $2,3\cdots n+1$ $OPT: n$ （选 1）

$MST(\bar{V})$ $\quad MST: 2(n-1)$ $\quad \frac{2(n-1)}{n}\to 2$

T^*（最小的 Steiner 树） ?

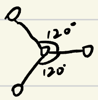
$\underset{OPT}{T^*}\longrightarrow 2T^*$（边重复一遍）

欧拉图（$deg(v)$ 偶）



∴ 近似比为 2

欧式平面



第十二讲：装箱问题 1-D

一、问题

给定 $I = \{a_1 \dots a_n\}$ $0 \le a_i \le 1, i = 1, 2 \cdots n$

用最少的单位尺寸的箱子装下所有的物品(元素)

? 两个箱子够用吗？ NP-C 等价于 partition 问题

gap $= \frac{3}{2}$ yes: 2 no: 3 $\Rightarrow$ 不存在近似 < 1.5 的 alg 多项式(在 $P \ne NP$ 前提下) 1.5近似：最好 除非 $P = NP$

e.g. First Fit Decreasing

若存在，则可用 alg 解决 NP-C 问题
① 用2个箱子 $\Rightarrow$ yes
② > 2 $\Rightarrow$ $OPT > 2$ ($\because$ 近似比 < 1.5) no

二、评价标准

渐近： $A(I) \le \alpha\, OPT(I) + \beta$ $\forall I$，称算法 A 渐近比 $\le \alpha$

β：$OPT(I)$ 的高阶无穷小

$\rho = \sup\limits_{OPT(I) \to +\infty} \frac{A(I)}{OPT(I)}$ $\sup\limits_{I} \frac{A(I)}{OPT(I)}$ 绝对近似比 ($\beta = 0$)

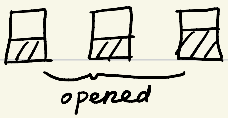
+1 可推

$FFD(I) \le \frac{3}{2} OPT(I)$

$FFD(I) \le \frac{11}{9} OPT(I) + \frac{6}{9}$ (Dose 2007)

Any-Fit

$\checkmark$ a_i 只要能装下，就不开新箱



$\Rightarrow$
- First-Fit
- Best-Fit
- Worst-Fit
- Almost Worst-Fit 装第二少的箱子

渐近比、近似比相同 1.7

$FF(I) \le \frac{17}{10} OPT(I) + \frac{8}{10}$ First Fit 渐进比、近似比相同

思路：引入一种"接链"的权重 $a_i \xrightarrow{w} w(a_i)$

$$w(I) = \sum_{i=1}^{n} w(a_i) = \sum_{j=1}^{FF(I)} w(B_j) = \sum_{l=1}^{OPT(I)} w(B_l^*)$$

要证：① $w(I) \le 1.7\, OPT(I)$ 只用证：$\forall B_l^*$，$w(B_l^*) \le 1.7$，再累加即可 key: w 如何设计 权函数

证 $w(B) \le 1.7$

② $FF(I) \le w(I) + \frac{18}{10}$

只用证：$w(B_j) \ge 1$ (在平均意义上，即加上 1.8 后)

权函数：$w(a)=\frac{6}{5}a+v(a)$，$v(a)=\begin{cases}0 & a\le\frac{1}{6} \\ \frac{3}{5}(a-\frac{1}{6}) & \frac{1}{6}<a\le\frac{1}{3} \\ 0.1 & \frac{1}{3}<a\le\frac{1}{2} \\ 0.4 & a>\frac{1}{2}\end{cases}$ (bonus)

微 $[0,\frac{1}{2}]$ 连续函数

小

$\frac{1}{3}<a\le\frac{1}{2}$（可以装俩） 中 $0.1\times2+2\times\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}=1$

$a>\frac{1}{2}$ 大物品可能单独装一箱 大 $0.4+\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}=1$

引理 1：若 $c(B)\le1$，则 $w(B)\le1.7$

证明：① B含大元素 $w(B)\le \overset{6/5}{1.2}+\overset{大}{0.4}+\overset{微}{0.1}$（超过 $\frac{1}{6}$ 才有bonus）

② B不含大元素 $w(B)\le1.2+\overset{3个0.1}{0.3}$ ✓

看一下 FF的箱子：

$\square_1\ \square\ \cdots\cdots\ \square_m$

（把 $w(B_i)\ge1$ 拿出）

剩下

$w(B_i)<1$，$i=1,2\cdots m$

且保持打开顺序

① 所有箱子不含大元素

② ……… 至多有一个中元素

③ ……… 尺寸之和 $<\frac{5}{6}$

和 $>1\times\frac{6}{5}(1.2)+0.8$ 还有

则平均 >1

引理 2：当前剩下的箱子记为 $B_1,\cdots B_m$（$m>2$），那么 $\frac{6}{5}c(B_i)+v(B_{i+1})\ge1$，$i=1\cdots m-2$ 把后面一个的bonus给前面 先不考虑最后一个 若 $m=1$，拉一个箱子回来

$=2$ $\square\square$ $c_1+c_2>1$（否则可以装一起） $w>\frac{6}{5}+0.8$ 平均 >1

证明：

若只装了一个物品 ⇒ 必是最后一个箱（otherwise 后面有物品可以放这里，∵只有一个 size $>\frac{1}{2}$）

claim：除最后面个箱子 $c(B)\ge\frac{2}{3}$，若 $<\frac{2}{3}$，则空隙 $>\frac{1}{3}$ $<\frac{2}{3}$ $\square\ \square\ \square$? 后面某个箱子里至少有两个物品，其中至少一个 $\le\frac{1}{3}$（∵至多一个中元素）⇒ 可以放入 $>\frac{1}{3}$ 空隙里

$(\frac{2}{3},\frac{5}{6})$

$\square_i\ \square_{i+1}$ y x

$\frac{6}{5}c(B_i)+v(B_{i+1})=\frac{6}{5}(\frac{5}{6}-z)+\frac{3}{5}z+\frac{3}{5}z=1$

$c(B_i)=\frac{5}{6}-z$，$\underline{x,y>\frac{1}{6}+z}$ 有bonus

三、Karmarkar-Karp 算法

$A(I)\le OPT(I)+O(\log^2 OPT(I))$

$I=\{a_1,a_2\cdots a_m\}$ m：物品尺寸的种类（个数） b_i：具有尺寸 a_i 的物品个数 n：物品个数 $n=\sum_{i=1}^{m}b_i$

N：单个箱子可行方案的集合 t_{ij}：在可行方案 j 中，具有尺寸 a_i 的物品个数

单个箱子方案

configuration LP: $\min \sum_{j=1}^{N} x_j$?

近似

s.t. $\sum_{j=1}^{N} t_{ij} x_j \geq b_i \quad i=1,2\cdots m$ 可以在 $poly(m, \log(n/s_m))$ 时间内求解

s_m 最小尺寸

$x_j \geq 0$ （$\{0,1\}$，松弛后）

假设 $s_m \geq \frac{1}{size(I)}$，$size(I)=\sum_{i=1}^{m} b_m a_m$，尺寸和 ?（练习）若小于 $\frac{1}{size(I)}$ 可以最后再装 | $size(I) \leq OPT$

解 LP 至多 m 个正分量（可能有分数）x_j^* 如 $x_i=1.3$，i 这个方案，那我们可以用 2 个箱子

对 LP 结果取上整

$\Rightarrow A(I) \leq OPT(I)+m$ 可能很大，如何↓？

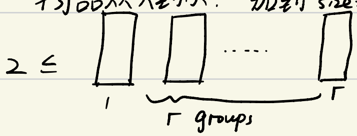
◦ $\lfloor x_j^* \rfloor$ 的部分直接采纳 I_z

◦ 剩下的部分 $(x_j^* - \lfloor x_j^* \rfloor)$ 记作 $I-I_z$，$size(I-I_z) < m$?

$\underbrace{LP(I-I_z)}_{\text{重新求解}} + LP(I_z) \leq LP(I)$ 可行解

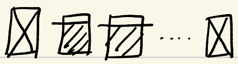
Harmonic Grouping (Rounding)

物品从大到小，$a_1 > a_2 > \cdots > a_m$ 加到 size 和 ≥ 2 就停 $\Rightarrow$ 得到若干 $2 \leq \ <3$ 的 group



$(|G_i| = n_i \geq 2$，且 $n_i \geq n_{i-1}$ $(\because a_i \downarrow))$

扔掉箱子 $1, r$ $(size < 6)$；随后 G_i 中除掉 $(n_i - n_{i-1})$ 个最小的元素 ($i=2\cdots r-1$)，得到 I' 则 $LP(I') \leq LP(I)$ 每组元素一样多，但更小



要证：扔掉的不超过 $O(\log(size(I)))$

去掉的物品尺寸之和：$\leq 6+3\sum_{i=2}^{r-1}(n_i - n_{i-1})\cdot\frac{1}{n_i} \leq \frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_i-1}+\cdots\frac{1}{n_{i-1}+1}$ $\leq 6+3\log(size(I))$

n_i 个元素，和为 3，则 $< \frac{3}{n_i}$（$\because$ 去掉最小的）

剩余物品 $m \leq \frac{size(I)}{2}$ 二分递减，最多 log 轮

$I \xrightarrow{grouping} I'$ → I_1（整）；I_2（分）→ I_2' → I_3；I_4 → ⋯

第十三讲：在线算法

一、基本概念

在线：
- 序列决策
- Input 以某种方式释放（未来信息未知）
- 做的决策不可更改

竞争比：$A(I) \le \alpha\, OPT(I) + \beta$（$\beta$：常数） $\forall I$ “α-竞争的”

optimal offline alg（OPT）

online alg ∵信息不够，产生了缺失

Example.

① 租雪橇问题 (ski-rental)

② online-bidding

③ cost-cow

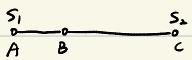
二、k-Server 问题 (Manasee etal JACM 1990)

1. 定义：度量网络 $G=(V,E)$

有 r 个 servers，位于 G 中某些点上。顶点访问需求 $\sigma=(r_1,\cdots\cdots r_n)$ 逐个到达，一旦 r_i $(i=1,2\cdots n)$ 出现，需要派遣一个 server 前去服务

目标：满足所有需求，使得 servers 移动距离之和最少

贪心：就近派遣



$\sigma=\{A.C.B.A.B.A\cdots\cdots\}$ 竞争比 $\to\infty$

定理：设 M 是度量空间的自身，共有 k+1 个点，则 k-servers 不存在好于 k-竞争的在线算法。

证明：设 A 是任一在线 alg，至少是 k-竞争的。 假设 A 的 configuration 中 k 个 servers 在 k 个不同顶点上

构造 实例：总是 request 没有 server 的顶点

构造 k 个算法。
要证其费用之和 = A
则 $OPT \le \frac{1}{k}A$

A：i 没有 server
B_1：
⋮
B_k：

会有 i，分别有一个不同的点没有 server.

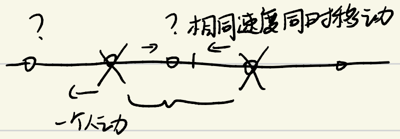
对于 request i A: $j \to i$ $d(j,i)$ (∵ i 本不在A的 servers 中)

则 $\exists B_k$ 其在 j 没有 server $i \to j$ $d(i,j) = d(j,i)$ 相当于 B_k 与 A 做了相反的移动.

且 A, $B_1 \cdots B_k$ 仍维持之前的性质: 各有一个不同的点没有 server

3. 线上的"包围"算法 (DC) Chrobak et al. 1990

(Double Coverage)



"只要看到,就要移动"

定理: DC 是 k-竞争的   序列决策 ⇒ 摊还分析

OPT 先后移动自己的 servers. 定义势函数 $\Phi \geq 0$. Φ_0 是初始值

DC Φ_i 是第i个事件完成后势函数的值

每个事件中

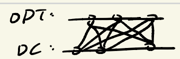
∘ 若 OPT: 移动距离为 d. $\Delta\Phi' \leq k \cdot d$ 至多增加

∘ ⋯ DC ⋯⋯, $\Delta\Phi'' \leq -d$ 至少减少

那么 $\Phi_n - \Phi_0 \leq k \cdot OPT(\sigma) - DC(\sigma)$

$\Rightarrow DC(\sigma) \leq k \cdot OPT(\sigma) + (\Phi_0 - \Phi_n)$

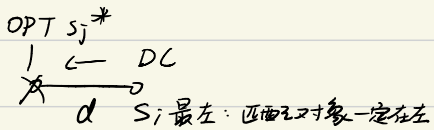
· M_{min}: OPT 和 DC 的 servers 位置的最小费用完美匹配.



$\Sigma = \sum_{i<j} d(s_i, s_j)$ DC的 servers 之间的距离和.

$$\Phi = k \cdot M_{min} + \Sigma \geq 0$$

△ OPT 移动距离为 d. $\Delta\Phi \leq k \cdot \underbrace{d}_{M_{min}}$

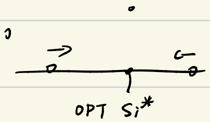


△ DC ①单独移动一个 server 距离为 d 此时 OPT, DC 都移了一个到 request 上 M_{min} 减少 d, Σ 增加 $(k-1)d$

$$\Delta\Phi = -kd + (k-1)d = -d$$

②移动两个 servers. 距离为 $2d$

M_{min} 不变 ? $\Delta M \le 0$



如果一个人离对象 dis↑，则另一个人 dis↓

Σ 减少 $2d$（两侧点抵消）

被某个点

$\Delta\Phi = -2d$

K-Server 猜想:

1. K-Server 存在 k-竞争算法
2. WF就是 k-竞争的

第十四讲：算法博弈简介

交互环境下的多人决策

n agents (players)

S_i 有限　$S = S_1 \times S_2 \times \cdots S_n$ 策略空间

$u_i : S \to R$

selfish:

算法博弈的三个方面：①均衡的计算　②博弈系统的效率分析　③机制设计

<<算法博弈论>>